Приемы произвольной активизации на занятиях по высшей математике

Семенова Надежда Игоревна, к.т.н.,
доцент кафедры высшей математики СПбГЛТУ им.С.М.Кирова,
старший методист ГБОУ средняя школа №16, Санкт-Петербург

Математика спросили:
– Есть ли крылья у слона?
– Есть, – ответил он, – но они равны нулю.

Какие ассоциации вызывает у обычного человека словосочетание «занятие по высшей математике в техническом ВУЗе»? Воображению представляется аудитория с огромной доской, заполненной непонятными значками, откуда-то доносится нудный голос преподавателя, за столами сидят сонные студенты. Главные действующие лица на таком занятии – непонимание и скука.

Механическое записывание текста за лектором не способствует осознанию и запоминанию фактов и связей между ними, а обезличенность материала ведет к формированию соответствующего отношения студентов к приобретаемым на занятии сведениям. В настоящее время поток информации, получаемый человеком ежедневно, настолько огромен и хаотичен, что его мозг оказывается не в состоянии обращать внимание на все подряд, поэтому он отказывается воспринимать и запоминать унылые, эмоционально-однотонные лекции и семинары.

Специальная терминология, символьная запись, длинные логические выкладки и абстрактные рассуждения, свойственные такому учебному предмету, как высшая математика, требуют большого сосредоточения и серьезных умственных усилий от студентов, сохранять которые на протяжении длительного времени просто невозможно. Лектор-историк или философ может расцветить свой рассказ забавными тематическими анекдотами, занятия специальных дисциплин привлекают к себе непосредственно практическим уклоном. Как же преподавателю математики бороться с эрозией внимания и поддерживать активную работу на своих занятиях?

Естественным подспорьем в данной ситуации является знание видов и приемов активизации деятельности [3].

Самый простой способ – это заставить организм учащегося отреагировать на низшем, физиологическом уровне: проветрить аудиторию, включить дополнительное освещение над доской, начать говорить громче или тише, чем обычно. Это приемы бессознательной, ***непроизвольной активизации***, не требующие от студентов энергозатрат.

К этому же виду активизации относится и смена видов деятельности. Даже на классической лекции в высшей школе записывание информации за преподавателем должно сменяться стадиями обсуждения и периодами правильно построенной самостоятельной работы студентов. Определение основополагающих понятий, формулировки ключевых теорем, классификация методов решения тех или иных задач также нуждаются в акцентировании на фоне общей канвы занятия.

Произвольная активизация возникает вследствие сознательного, волевого усилия студента и бывает *внешней* (как результат реально действующего стимула на основе внешних побуждающих действий преподавателя) и *внутренней* (как результат смыслообразующего стимула на основе инициативы самого учащегося).

Ни для кого не секрет, что к деятельности студента чаще всего побуждает неумолимо приближающаяся дата сдачи экзамена или зачета, а также обещание преподавателя выставить вожделенный зачет «автоматом». Эта внешняя мотивация неотъемлемо присутствует при обучении в высшей школе. Но в данном случае речь не о ней, а об активной работе обучающихся на рядовом занятии.

В качестве внешней произвольной активизации на занятиях по высшей математике хорошо работают такие приемы, как демонстрация парадоксов, наличие некой интриги или провокации, грамотно организованная работа в парах или группах, юмор и даже, как ни удивительно, неординарность личности самого преподавателя.

Для примера можно привести задание, используемое при изучении темы «Исследование функции одной переменной». Студентам предлагается построить графики, описывающие процессы, которые сформулированы известными русскими пословицами: «Чем дальше в лес, тем больше дров», «Кашу маслом не испортишь», «Дальше кумы – меньше греха» (Рис.1-3) [6].

Рис.1

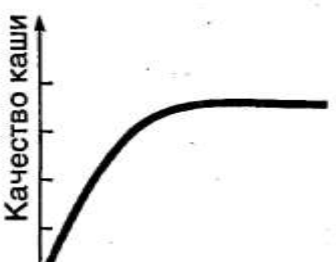

Рис.2

Рис.3

Для переключения внимания перед следующим этапом работы можно использовать элементы истории математики или процитировать то или иное меткое высказывание известных деятелей науки. При этом совершенно необязательно углубляться в исторические «дебри», достаточно лишь оттенить важный момент занятия. Полезные и любопытные сведения удобно сводить в таблицу или представлять в виде схемы. Пример такого рода таблицы по разделу «Математический анализ. Функция одной переменной» приведен ниже [1,2,4].

Термин	***Этимология, обозначение***	***Дата возникновения***	***Впервые употребил, осуществил***	***Комментарии***
Аргумент функции	лат. *argumentum* – знак, признак, содержание, довод	1862	Карл Готфрид Нейман	Впервые употребил в своей статье.
		1898	Юлиан Васильевич Сохоцкий	Впервые употребляет термин в русской литературе. Общепринятым термин становится только через 2-3 десятилетия.
Асимптота	греч. α – отрицат. приставка, συμπτωτος– совпадающий, сливающийся	2 век до н.э.	Апполоний Пергский	Ему приписывают авторство термина.
		1748	Леонард Эйлер	Разработал учение об асимптотах.
		1813	Франсуа Пьер Шарль Дюпен	Ввел термин «асимптотические линии».
		1826	Огюстен Луи Коши	Изобрел «современный» прием отыскания асимптот.
Бесконечность	Римский символ ∞ означал 1000.	1525	Альбрехт Дюрер	Ввел термин «бесконечный».
		1655	Джон Валлис	Ввел знак ∞ для указания неограниченного возрастания числа.
		1699	Райер, профессор математики в г.Киль	Ввел термин «конечный».
		1881	Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд	Предложил определение, эквивалентное современному.
Бесконечно малая величина	о -малое	XVII век	Пьер Ферма	Употреблял в нечетком виде.
		XVII век	Исаак Ньютон Готфрид Вильгельм	Широко оперируют.

			Лейбниц	
		1821-1823	Огюстен Луи Коши	Дал определение на основе понятия о предельном переходе.
		1894	Пауль Густав Генрих Бахман	Ввели понятие o –малое.
		1909	Эдмунд Георг Герман Ландау	
		1870	Дюбуа Раймон	Ввел обозначения для сравнения бесконечно малых: $\alpha \pi \beta$, $\alpha \phi \beta$, $\alpha \sim \beta$.
График	греч. γραφικος – относящийся к письму или к живописи			
Дискретность	лат. discerno – отделяю, разделяю, discretus – разорванный, сложенный из отдельных частей			
Дифференциал	лат. differentia – разность	XVII век	Иоганн Бернулли	Ввел обозначение приращения Δ.
		1675	Готфрид Вильгельм Лейбниц	Ввел обозначение дифференциала dx.
Интервал	лат. intervallum – промежуток, расстояние	1909	Герхард Ковалевский, немецкий профессор математики в Лейпциге и Праге	Ввел обозначения $\langle a;b \rangle$, $(a;b)$, $\langle a;b)$, $(a;b\rangle$.
		1921	Ганс Хан	Заменил $\langle$ на [и $\rangle$ на].
Максимум, минимум, экстремум	лат. maximum – наибольшее, minimum – наименьшее, extremum – крайний,		древнегреческие математики	Решали отдельные задачи на нахождение экстремума.
		1629	Пьер Ферма	Создал первый общий алгоритм решения подобных

	последний			задач в работе «Метод отыскания наибольших и наименьших значений».
		1684	Готфрид Вильгельм Лейбниц	Рассматривал наличие экстремума при $df = 0$ или при $df = \infty$, связь между убыванием и возрастанием функции и знаком df, между выпуклостью и вогнутостью графика и знаком $d^2 f$.
Монотонность	греч. μονος – один, τονος– натяжение, напряжение, тон	1881	Карл Готфрид Нейман	Первоначально применил термин к монотонным последовательностям чисел.
		1837	Петер Густав Лежен Дирихле	Четко определил понятие при исследовании разложения функции в тригонометрические ряды.
Неопределенность		1696	Гийом Франсуа де Лопиталь	Исследовал неопределенность $\frac{0}{0}$ без каких-либо обозначений.
		1730	Иоганн Бернулли	Ввел символ $\frac{0}{0}$.
		1748	Леонард Эйлер	Рассматривал неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.
		1786	Велезеслаус Иоганн Густав Карстен	Ввел современные обозначения неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$.
		1821, 1823	Огюстен Луи Коши	Рассматривал неопределенности вида ∞^0, 1^∞ и др.
Непрерывность		1817	Бернард	Сформулировали

			Больцано	современное определение непрерывности функции в точке.
		1821	Огюстен Луи Коши	
		1878	Улисс Дини	Произвел классификацию разрывов I и II рода в книге «Основы теории функций действительной переменной».
		XIX век	Мориц Паш Дюбуа Раймон	Ввели понятие скачка.
Образ, прообраз		1872-1878	Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд	Впервые ввел понятие отображения одного множества в другое без оговорок об их природе.
Окрестность	фр. voisinage d’une valeur, нем. Nachbarshaft	1821	Огюстен Луи Коши	Впервые ввел термин.
		1856	Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс	Ввел понятие окрестности точки *x*.
Период	греч. περι – около, вокруг, οδος – дорога, путь			
Правило Лопиталя		1696	Гийом Франсуа де Лопиталь	Должен был стать артиллерийским офицером, но оказался непригодным к службе. В 1691-1692 г. его наставником был И.Бернулли, под влиянием лекций которого был написан курс «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», в котором и содержалось данное правило.
Предел	лат. limes (limite) – межа, граница, пограничный	IV век до н.э.	Евдокс Книдский	Использовал метод исчерпывания, являющийся некоторым подобием

	камень			предельного перехода.
		IV-III век до н.э.	Евклид Архимед	Использовали метод предельного перехода.
		1615	Иоганн Кеплер	Используют идеи предела.
		1635	Бонавентура Кавальери	
		1655	Джон Валлис	
		1647	Григорий Сен-Винсент	Впервые употребил термин.
		1786	Симон Антуан Жан Люилье	Ввел символ *lim*.
		XIX век	Фаркаш и Янош Больяи	Стали указывать предел, к которому стремится аргумент.
		1817	Бернард Больцано	Дали определение предела через ε-δ.
		1820	Огюстен Луи Коши	
		1837	Петер Густав Лежен Дирихле	Ввел обозначения $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ для односторонних пределов.
		1841-1845	Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс	Ввел обозначение $\lim\limits_{x=a} f(x)$.
		1905	Лиисем	Ввел символ $\rightarrow$ в обозначении предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Производная	нем. Ableiten, Derivare, фр. derivee	1665	Исаак Ньютон	Назвал производную «флюксией», использовал обозначения $\dot{x}$, $\ddot{x}$, часто употребляемые в последствии физиками.
		1675-1677	Исаак Ньютон Готфрид Вильгельм Лейбниц	Использовали впервые данный термин в переписке.
		1684	Готфрид Вильгельм Лейбниц	Называл производную дифференциальным отношением, что объясняет соответствующее

				обозначение $\frac{dy}{dx}$.
		1770	Жозеф Луи Лагранж	Ввел обозначения y', $f'(x)$.
Суперпозиция	лат. super – над, positio – положение	1741-1743	Даниил Бернулли	Высказал идею принципа суперпозиции.
		1833	Чарльз Уитстоун	Впервые используют термин.
		1838	Огюстен Луи Коши	
Функция	лат. function – свершение, исполнение	Рубеж XVI-XVII вв.		Функции задавались словесно, графически, таблично.
		1637	Пьер Ферма Рене Декарт	Показали, как представлять зависимости между переменными посредством уравнений.
		1673	Готфрид Вильгельм Лейбниц	Впервые использует термин, называя им отрезки, связанные с точкой, описывающей некоторую линию.
		1676	Исаак Ньютон	Употребляет для функции название «ордината». «Я не мог бы, конечно, получать этих общих результатов, прежде чем не отвлекся от рассмотрения фигур и не свел бы все просто к исследованию ординат». И.Ньютон
		XVIII век	Леонард Эйлер	Провозгласил функцию центральным понятием анализа. «Весь анализ бесконечного вращается вокруг переменных количеств и их функций». Л.Эйлер
		1694, 1698	Иоганн	Ввел для функции

			Бернулли	обозначения *z* и *X*.
		1718	Иоганн Бернулли	Функция есть «количество, образованное каким-либо способом из *x* и постоянных величин».
		1734	Леонард Эйлер	Ввел для функции обозначение *f(x)*.
		1887	Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд	Дал размытое определение функции как отображения одного множества на другое.
		1911	Джузеппе Пеано	Дал четкое определение функции.

Необходимость преобразования информации, поиск ошибок, наличие в задании элементов исследования, «экспериментальное нащупывание» провоцируют обучающихся на самостоятельные действия и включают механизмы внутренней мотивации. Ведь куда интереснее сделать «открытие» самому, чем услышать готовый рецепт действий от преподавателя.

Однако задания подобного рода таят в себе методические «подводные камни»: все шаги, которые студент выполняет автономно, без жесткого контроля со стороны преподавателя, должны быть для него доступны. Если же расстояние между реальными знаниями студента и требованиями, предъявляемыми к нему задачей, будет слишком большим, то он просто не сможет перешагнуть эту пропасть.

Ниже приведен пример задания на самостоятельное преобразование новой информации из раздела «Линейная алгебра».

Прочитайте текст [5] и выполните следующие после него задания.

Решение систем линейных уравнений

Решением системы линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется n значений неизвестных, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными*, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот. Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет хотя бы одно – нулевое – решение.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы m линейных уравнений с n неизвестными дает теорема ***Кронекера-Капелли***: система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу ее основной матрицы.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем:

1) Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2) Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

1. Классифицируйте системы линейных уравнений по заданному основанию. Подберите соответствующие примеры систем из двух уравнений с двумя неизвестными.

По отличию свободных членов от нуля	
Пример.	Пример.
По наличию или отсутствию решения	
Пример.	Пример.
По количеству решений	
Пример.	Пример.

2. Пусть дана система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных. Пусть A – основная матрица системы, $A|B$ – расширенная матрица системы. Определите количество решений системы в зависимости от заданных

условий. Подберите соответствующие примеры систем из двух уравнений с двумя неизвестными.

<table>
<tr><td>$r(A|B) \neq r(A)$</td><td colspan="2">$r(A|B)=r(A)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Пример.</td><td>$r(A|B)=r(A)=n$</td><td>$r(A|B)=r(A)<n$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Пример.</td><td>Пример.</td></tr>
</table>

С большим энтузиазмом учащиеся выполняют задания, направленные на поиск ошибок в заданной информации. Даже не самые успешные студенты активно приступают к их выполнению: гораздо приятнее найти чужую ошибку, чем делать ее самому. Примером такого задания является текст из раздела «Векторы».

Прочитайте текст. Найдите и исправьте в нем все ошибки.

Векторы: основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются: площадь, объем, температура, работа, импульс, масса.

Такие величины, как сила, время, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Они называются *векторными*.

Вектор – это направленный отрезок. *Модулем вектора* называется его длина. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* вектором. Нулевой вектор не имеет направления. Вектор, длина которого отлична от нуля, называется *единичным* вектором.

Если векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они называются *сонаправленными*.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны и имеют одинаковые длины.

Два вектора в пространстве называют *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

В окончание можно привести пример комплексного задания, сочетающего в себе обобщение ранее изученного материала и порождение нового знания по аналогии: заполнение таблицы по теме «Функция нескольких переменных».

<table>
<tr><td>Функция одной переменной
$f : X \to Y$, $X \subset$, $Y \subset$
Аргумент:</td><td>Функция двух переменных
$f : D \to Z$, $D \subset R^2$, $Z \subset R$
$R^2 = \{(x; y) \mid x \in R, y \in R\}$
Аргументы:</td></tr>
<tr><td>δ -окрестность точки x_0 в R
Условие: $\left|x - x_0\right| < \delta$
Объект:</td><td>δ -окрестность точки $(x_0; y_0)$ в R^2
Условие: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$
Объект:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определение предела в точке</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon)$</td><td>$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A \Leftrightarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Непрерывность функции в точке</td></tr>
<tr><td>$f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:
1) $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки;
2) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.</td><td>$f(x; y)$ называется непрерывной в точке $(x_0; y_0)$, если:
1)

2)

3)</td></tr>
<tr><td>Приращение функции
$\Delta f =$</td><td>Частные приращения функции
$\Delta_x f = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$;
$\Delta_y f =$
Полное приращение функции
$\Delta f =$</td></tr>
<tr><td>Производная первого порядка
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$</td><td>Частные производные первого порядка
$f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$
$f'_y =$</td></tr>
<tr><td>Дифференциал функции
$df =$</td><td>Полный дифференциал функции
$df = f'_x dx + f'_y dy$</td></tr>
<tr><td>Производные высшего порядка
$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$,…, $f^{(n)} =$</td><td>Частные производные высших порядков:
$f''_{xx} = (f'_x)'_x$, $f''_{yy} = (f'_y)'_y$, $f''_{xy} = (f'_x)'_y$,
$f''_{yx} = (f'_y)'_x$ и т.д.
Теорема Шварца: $f''_{xy} = f''_{yx}$,
$f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}$ и т.д.</td></tr>
</table>

Использованная литература:

1. Александрова Н.В. Математические термины. Справочник. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Радяньска школа, 1979.
3. Ермолаева М.Г. Современный урок: анализ, тенденции, возможности. – СПб.: КАРО, 2008.
4. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1965.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2005.
6. Пухначев Ю., Попов Ю. Математика без формул. – М.: Столетие, 1995.