Метод замены множителей

Плехова Людмила Михайловна
учитель математики ГБОУ ЦО № 80
Центрального района Санкт-Петербурга

Методическая разработка урока
Алгебра, 10-11 класс

Задачи урока: сформировать универсальные учебные действия (УУД) для решения неравенств повышенной сложности; познакомиться с приемами решения неравенств.

Первый аспект – мотивационно - целеполагающий. Создать условия в рамках урока для формулирования учащимися образовательных целей урока (изучить приемы решения неравенств новым методом).

Второй аспект - деятельностный. Учащиеся в процессе урока проявляют самостоятельную познавательную деятельность. Получают опыт правильного применения теоретических рассуждений и формулировок, приобретают информационную компетентность при работе с текстом.

Развитию УУД способствует применение педагогических технологий: проектная деятельность; исследовательская работа; дискуссионная технология; коллективная и индивидуальная мыслительная деятельность.

Технологическая карта урока:

- 1. ***Создание*** условия для возникновения ***внутренней потребности*** в изучении материала.
- 2. ***Формулирование целей урока учащимися***, определяя при этом границы собственного знания и незнания.
- 3***. Объяснение нового материала*** – это выявление затруднений и планирование своих действий по решению учебной задачи.
- 4***. Самостоятельное решение*** учащимися задания, выполняя самопроверку, сравнивая с эталоном.
- 5. ***Рефлексия***: научить детей оценивать свою готовность обнаруживать незнания, находить причины затруднений, определять результат своей деятельности.
- 6. Учащиеся ***выбирают самостоятельно*** (из предложенного учителем) ***домашнее задание*** с учетом индивидуальных возможностей.

Что необходимо для сформированности любого УУД:

- **Сформировать первичный опыт выполнения этого действия и мотивацию;**
- **Сформировать понимание алгоритма выполнения УУД, основываясь на имеющийся опыт;**
- **Сформировать умение выполнять УУД посредством включения его в практику, организовать самоконтроль его выполнения.**

Образовательная цель урока: познакомить учащихся с методом замены множителей, как эффективным способом решения целого класса неравенств.
Развивающая цель урока: научиться решать задания ЕГЭ повышенной сложности.
Воспитательная цель урока: преодолеть барьер страха перед заданиями второго уровня (задания С3 ЕГЭ), показать учащимся, что решению таких задач, можно научиться.

Задачи урока:

— ввести понятие метода замены множителей и рассмотреть применение этого метода для решения различных видов неравенств;
— повторение и обобщение метода интервалов;
— повторение и обобщение метода решения систем неравенств;
— развитие мышления;
— расширение кругозора учащихся;
— воспитание познавательной активности;
— повышение интереса к изучению математики на примере красоты метода замены множителей;
— подготовка учащихся к решению задачи С3 ЕГЭ по математике.

Оборудование: оборудование Смart . Презентация.

Приложение 1. Приложение 2.

<u>Ход урока</u>.

I. Мотивационно-целеполагающий этап (1 мин)**.**

Вопросы:

- какова тема нашего урока?
- зачем нужно рассматривать эту тему?
- интересно ли вам решать такие неравенства?
- верители вы тому, что можете научиться решать такие неравенства?
- и др. …

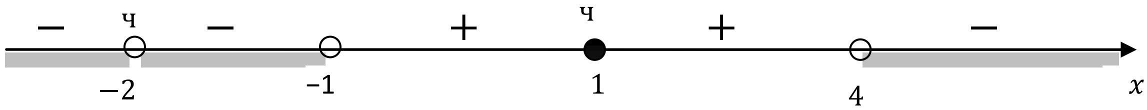
II. Этап. Постановка проблемы (проверка домашнего задания) (5 мин).

(на экран выводятся отсканированные решения из тетрадей учащихся)

1). Решить неравенство: $\frac{(x^2-1)(x^2+x-2)}{8+2x-x^2} \leq 0$

Корни числителя: $1; -1; 1;\ -2$

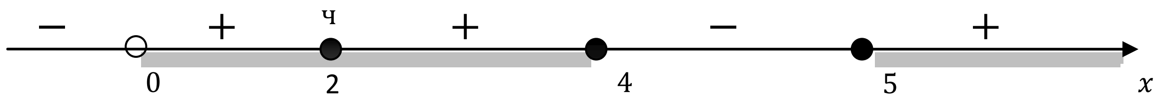
Корни знаменателя: $4;\ -2$



Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup \{1\} \cup (4;\ +\infty)$

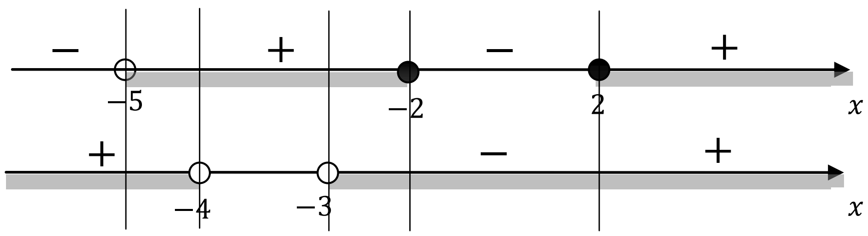
2). Решить неравенство: $\frac{(x^2-6x+8)(x^2-7x+10)}{x} \geq 0$

Корни числителя: $2; 4; 2;\ 5$ Корни знаменателя: 0



Ответ: $(0; 4] \cup [5;\ +\infty)$3).

3) Решить систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+5} \geq 0 \\ x^2+7x+12 > 0 \end{cases}$



Ответ: $(-5; -4) \cup (-3; -2] \cup [2;\ +\infty)$

III. Этап подготовки учащихся к активному и сознательному усвоению нового материала.

1). Рассмотрим функцию $f(t) = 7^t$

Задание: записать	Решение
$f(2)$	$f(2) = 7^2$
$f(-1)$	$f(-1) = 7^{-1}$
$f(a)$	$f(a) = 7^a$
$f(x)$	$f(x) = 7^x$
$f(x+5)$	$f(x+5) = 7^{x+5}$
$f(x^2-3x)$	$f(x^2-3x) = 7^{x^2-3x}$

Вспоминаем: выражения $f(2)$; … ; $f(x^2-3x)$ называются **значениями функции**, а выражения, стоящие в скобках: 2; …; x^2-3x; - называются **значениями аргумента**.

2). Вспоминаем определения возрастающей и убывающей функций.

Функция $y = f(t)$называется возрастающей (убывающей) на множестве М, если для любых $t_1 > t_2$ из множества М выполняется условие:

$f(t_1) > f(t_2)$ $(f(t_1) < f(t_2))$.

IV. Этап. Деятельностный аспект урока.

Определения возрастающей и убывающей функций можно сформулировать по-другому.

Функция $y = f(t)$называется возрастающей (убывающей) на множестве М, если для любых $t_1; t_2$ из множества М выражения $t_1 - t_2$ и $f(t_1) - f(t_2)$ имеют одинаковый (противоположный) знак.

Этот факт можно использовать при решении неравенств, в правой части которых стоит ноль. Можно в левой части (числителе и/или знаменателе левой части) заменить разность значений монотонной функции разностью значений аргумента. При этом, если функция возрастающая, то знак неравенства сохранится, а если функция убывающая, то знак неравенства поменяется на противоположный. Такой прием решения неравенств и называется <u>методом замены множителей</u>.

Рассмотрим несколько неравенств.

№1. Решить неравенство $\frac{7^{x^2-3x}-7^{x+5}}{0{,}3^x-1} \leq 0$

В числителе левой части стоит разность значений возрастающей на R функции $f(t) = 7^t$.

В знаменателе тоже можно увидеть разность значений функции $g(t) = 0{,}3^t$, если представить единицу как $0{,}3^0$. Эта функция убывает на R. Значит, исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x^2 - 3x) - (x + 5)}{x - 0} \geq 0$$

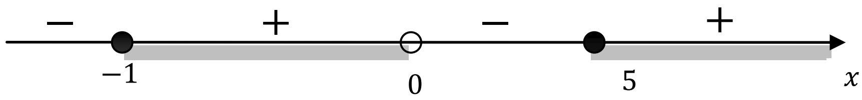
$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x} \geq 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов.

Корни числителя: 5; -1

Корень знаменателя: 0

Ответ: $[-1;\ 0) \cup [5;\ +\infty)$



V. Этап (15 мин).

Вызванные учащиеся решают неравенства на доске под контролем учителя (остальные работают в тетрадях).

№ 2. Решить неравенство $\frac{(log_2 x - 3)(x^2 - 7x - 8)}{log_{0,4} x} \geq 0$

Приведем неравенство к виду, в котором явно видна разность значений логарифмической функции.

$$\frac{(log_2 x - log_2 8)(x^2 - 7x - 8)}{log_{0,4} x - log_{0,4} 1} \geq 0$$

Заменим разность значений логарифмической функции на разность значений аргумента. В числителе функция возрастающая, а в знаменателе убывающая, поэтому знак неравенства изменится на противоположный. Важно не забыть учесть область определения логарифмической функции, поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств.

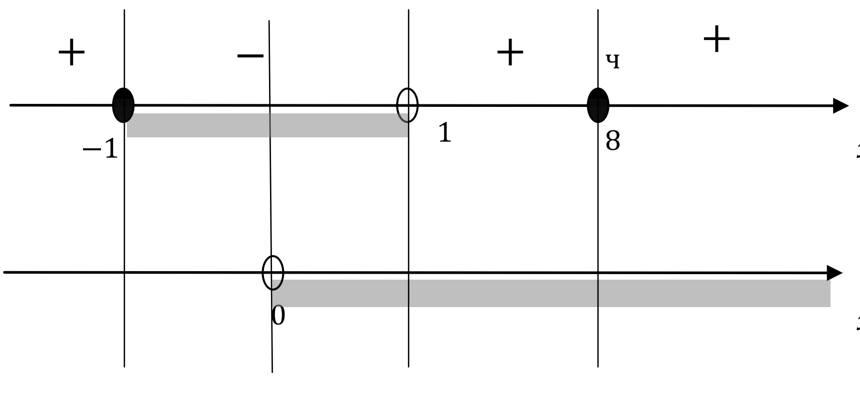
$$\begin{cases} \frac{(x-8)(x^2-7x-8)}{x-1} \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Первое неравенство решим методом интервалов.

Корни числителя: *8; 8;* -1

Корень знаменателя: *1*

Ответ: $(0; 1) \cup \{8\}$

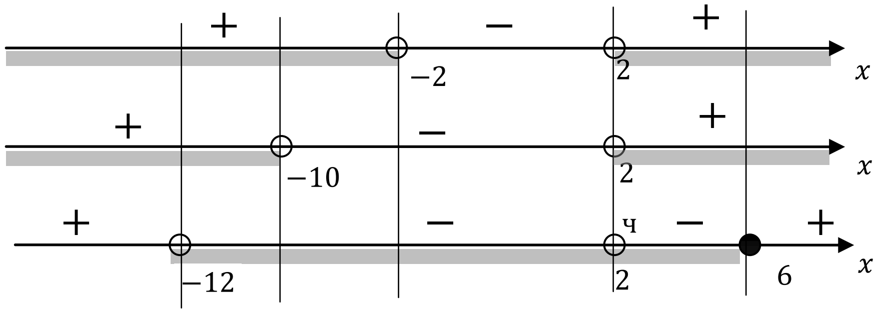


№3. *Решить неравенство* $\dfrac{log_{0,7}(2x^2-8)-log_{0,7}(x^2+8x-20)}{\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}-\left(\frac{5}{3}\right)^{24-10x}} \geq 0$

Заменим в числителе и знаменателе разность значений монотонных функций разностью значений аргументов, учитывая область определения функций и характер монотонности.

$$\begin{cases} 2x^2-8>0 \\ x^2+8x-20>0 \\ \dfrac{(2x^2-8)-(x^2+8x-20)}{x^2-(24-10x)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-8>0 & (1) \\ x^2+8x-20>0 & (2) \\ \dfrac{x^2-8x+12}{x^2+10x-24} \leq 0 & (3) \end{cases}$$



(1) Корни: 2; -2.

(2) Корни: 2; -10; (3) ; Корни числителя: 2; 6. Корни знаменателя: $2 -12$.

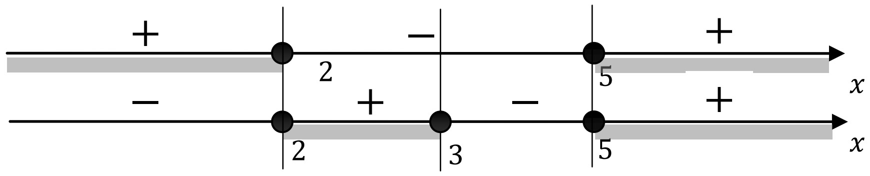
Ответ: $(-12;\ -10) \cup (2;\ 6]$

№4. *Решить неравенство* $(x-3)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$

$(x-3)\left(\sqrt{x^2-7x+10}-\sqrt{0}\right) \geq 0$

Можно заменить разность значений корня разностью подкоренных выражений. Функция корня возрастающая, значит, знак неравенства сохраняется. При этом необходимо учесть область определения арифметического квадратного корня.

$$\begin{cases} x^2-7x+10 \geq 0 \\ (x-3)(x^2-7x+10) \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $\{2\} \cup [5;\ +\infty)$

VI. Этап. Развитие универсальных учебных действий(УУД)

Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой можно применить метод замены множителей. Неравенства $f^2(x) > g^2(x)$ и $|f(x)| > |g(x)|$ равносильны, значит, выражения $f^2(x) - g^2(x)$ и $|f(x)| - |g(x)|$ имеют одинаковый знак. Этот факт также можно использовать при решении неравенств, в правой части которых стоит ноль. Можно в левой части (числителе и/или знаменателе левой части) заменить разность модулей двух функции разностью квадратов этих функций. Знак неравенства при этом сохранится.

№5. *Решить неравенство* $\frac{|x^2-2x-3|-|6x+6|}{log_{0,3}(x+3)} \geq 0$

$$\frac{|x^2-2x-3|-|6x+6|}{log_{0,3}(x+3)-log_{0,3}1} \geq 0$$

Заменим в числителе разность модулей двух функций разностью их квадратов, а в знаменателе разность значений логарифмической функции разностью аргументов.

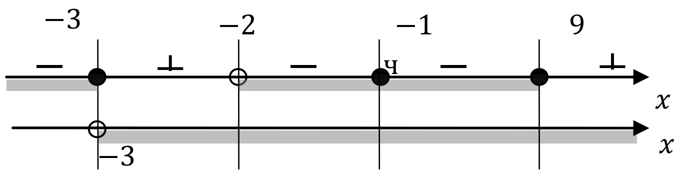
В знаменателе функция убывающая, значит, знак неравенства изменится на противоположный. При этом надо учесть область определения логарифмической функции.

$$\begin{cases} \frac{(x^2-2x-3)^2-(6x+6)^2}{(x+3)-1} \leq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\left((x^2-2x-3)-(6x+6)\right)\left((x^2-2x-3)+(6x+6)\right)}{x+2} \leq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

Первое неравенство решим методом интервалов.

Корни числителя:

Корни знаменателя: -2.



Ответ: $(-2;\ 9]$

VII. Этап. Рефлексия.(подведения итогов урока и информирования учащихся о домашнем задании (4 мин).

Подведение итогов урока с помощью мини-презентации. Справочный материал раздается каждому учащемуся.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Метод замены множителей.

Метод можно применить в том случае, если в правой части неравенства стоит ноль, а левая часть представлена в виде произведения или частного. Метод позволяет упростить неравенство, сведя его решение к решению более простого неравенства или системы более простых неравенств.

1 случай. Если среди множителей (числителя или знаменателя) есть выражение, являющееся разностью значений функции, монотонной на всей области определения, его можно заменить разностью значений аргумента.

При этом 1) Необходимо учесть область определения функции.

2) Если функция является возрастающей, то знак неравенства сохраняется.

3) Если функция является убывающей, то знак неравенства меняется на противоположный.

2 случай. Если среди множителей (числителя или знаменателя) есть выражение, являющееся разностью модулей двух функций, его можно заменить разностью квадратов этих функций.

<u>Домашнее задание</u>. ***Решить неравенства, используя метод замены множителей:***

1) $\frac{(2^x-128)(x^7-128)}{log_3(x^2-2x)-1} \leq 0$

2) $\frac{log_5(2x-3)}{log_{0,7}(4-x)} \geq 0$

3) $(x^2-5x+6)\sqrt{3-x} \geq 0$

4) $\frac{|x^2-x|-|x^2-5x+4|}{log_{0,9}(x^2-1)} \leq 0$

Ответы к домашнему заданию.

1) $(-2;\ 0) \cup (3;\ 7]$
2) $(1{,}5;\ 2] \cup (3;\ 4)$
3) $(-\infty;\ 2] \cup \{3\}$
4) $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ 2\right]$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Материалы для дальнейшего изучения метода замены множителей.

№1. Этим методом можно решать логарифмические неравенства с переменной в основании логарифма.

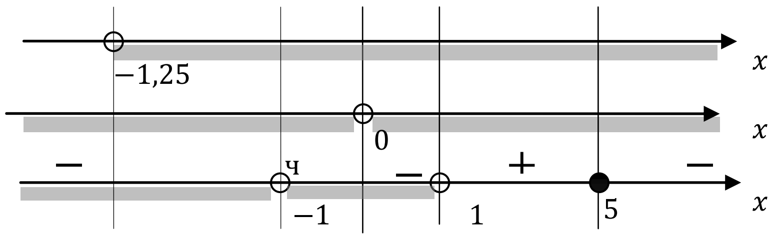
Решить неравенство $log_{x^2}(4x+5) \leq 1$

Перейдем к любому числовому основанию.

$$\frac{ln(4x+5)}{ln(x^2)} \leq 1$$

$$\frac{ln(4x+5)-ln(x^2)}{ln(x^2)-ln1} \leq 0$$

$$\begin{cases} 4x+5>0 \\ x^2>0 \\ \frac{4x+5-x^2}{x^2-1} \leq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-1{,}25;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup [5;\ +\infty)$

№2. *Решить неравенство* $log_{x+1}(5x^2-x) \geq 2$

Ответ: $[-0{,}25;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$

№3. *Решить неравенство* $\dfrac{\log_{(5^x+7)}15}{\log_{(5^x+7)}(x^2-3)} \geq \dfrac{\log_7(x^2+8x+15)}{\log_7(x^2-3)}$

Ответ: $[-8;\ -7) \cup (-7;\ -5) \cup (-3; -2\ ) \cup \left(\sqrt{3};\ 2\right)$

№4. *Решить неравенство* $\dfrac{0{,}25\log_2 x^4 + \log_{0,5}(x^2-6)}{\log_{0,7}(x+5)} \geq 0$

Ответ: $(-4;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$

Дидактические выводы:

Данный современный урок (СУ) направлен:

- **на формирование и развитие УУД;**
- **на достижение личностных результатов;**
- **урок строиться в рамках системно-личностного подхода;**
- **развивает у учащихся способности самостоятельно ставить учебную задачу;**
- **контролировать и оценивать свои достижения.**

Литература

1. Белоненко Т.В., Васильева Н.И. Сборник конкурсных задач по математике. – Санкт-Петербург: СМИО Пресс, 2003

2. Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ-2010. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства. – М.: МЦНМО, 2010

3. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: Илекса, 2007