Некоторые классические диофантовы уравнения

«Загадок неразгаданных не счесть,
Хоть на догадки разум наш и падок,
И вот она, загадка из загадок…»
Л. Камоэнс. Сонет

«Между прочим, если вы ищите хорошую проблему…»
Р. Фейнман. Лекции по физике

Работа посвящена одному из центральных разделов теории чисел – теории диофантовых уравнений.

Актуальность

Нет ни одной математической проблемы, которая бы ни была столь популярна, как знаменитая последняя (или великая) теорема Ферма. В переводе на современный математический язык Ферма утверждал, что уравнение

$$a^n + b^n = c^n, \quad n > 2$$

не имеет целочисленных решений с $abc \neq 0$.

Но и, хорошо изученный случай, для $n = 2$, (уравнение Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$) имеющий бесконечное множество решений, в источниках, изученных нами, не имеет единой формулы для задания всех решений. Исключением оказалась аннотация работы казахстанского учёного Кожегельдинова С. Ш., который предложил общую формулу, задающую все решения уравнения Пифагора.

Решение неопределённых уравнений имеет не только теоретический интерес. К диофантовым уравнениям приводят задачи, по смыслу которых неизвестные значения величины могут быть только целыми числами. Например, космические, астрономические задачи, задачи арифметической геометрии. Связь между данным вопросом теории чисел и свойствами правильных точечных решёток позволила развить и методы изучения последних, сыгравших чрезвычайно важную роль в решении ряда основных задач кристаллографии.

Противоречие: Имеется практическая необходимость выработать стандартный способ нахождения всех решений диофантовых уравнений второй степени и выше с двумя и более переменными, но на сегодняшний день, не существует единого способа или приёма, позволяющего решить любое диофантово уравнение, если его степень выше первой.

Указанное противоречие позволило сформулировать цель и задачи нашей работы, исходя из уровня личных знаний.

Ц е л ь   р а б о т ы : Нахождение способа задания общей фор-мулы всех решений неопределённых уравнений второй и выше степени с двумя и более неизвестными на множестве натуральных чисел.

Г и п о т е з а : **Е с л и** удастся найти общую формулу или доказать, что её нет для нахождения всех решений некоторых диофантовых уравнений, **т о** возможно удастся применить полученные результаты и для нахождения общего способа или подхода для всех диофантовых уравнений второй и выше степени с двумя и более переменными, **т а к к а к** многие проблемы математики решались для частных случаев, а после обобщались.

О б ъ е к т   и с с л е д о в а н и я : некоторые диофантовы уравнения второй и выше степени с тремя и более переменными.

П р е д м е т   и с с л е д о в а н и я : процесс нахождения общего решения уравнения Пифагора и рассмотрение задач, связанных с уравнением Пифагора.

З а д а ч и :

1. Попытаться найти общие полные решения или, по крайней мере, бесконечное множество решений некоторых неопределённых уравнений.
2. Проследить некоторые закономерности.
3. Предложить общие подходы, которые будучи достаточно элементарными, тем не менее, приводят к решению части диофантовых уравнений.
4. В случае удачи, рассмотреть возможность .

П л а н и р о в а н и е   о ж и д а е м ы х   р е з у л ь т а т о в :

Работа над проектом поможет найти общую формулу решений некоторых диофантовых уравнений и оценить перспективы применения полученных результатов для решения других неопределённых уравнений второй степени.

К р и т е р и и   о ц е н к и   о ж и д а е м ы х   р е з у л ь т а т о в :

- выявление возможности использования арифметических функций к решению некоторых диофантовых уравнений;

- нахождение единой формулы всех решений некоторых диофантовых уравнений;

- рассмотрение возможности использования полученных результатов для решения близких задач.

М е т о д ы   и с с л е д о в а н и я

1) изучение литературы;
2) консультация со специалистами в области алгебры и теории чисел;
3) анализ теоретических данных;
4) проведение расчетов и соотнесение их с результатами полученными другими авторами.

В работе не рассматриваются неопределённые уравнения первой степени, поскольку теория их полностью разработана. Мало внимания уделяется уравнениям второй степени от двух переменных, так как в общем случае их решение сводится к решению уравнения Пелля, которому посвящено немало литературы. Основное внимание уделено рассмотрению различных подходов к решению неопределённых уравнений от трёх и более неизвестных.

Глава I

§ 1.1 Уравнение Пелля

Прежде чем обратиться к уравнению Пелля вспомним, что иррациональное число можно представить в виде бесконечной непрерывной дроби

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

числа

$$a_0 + \frac{1}{a_1}, \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \qquad \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, \ldots$$

называемые подходящими дробями соответственно первого, второго, третьего и т. д. порядка обозначаются так:

$$\frac{P_1}{Q_1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2}, \qquad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots \qquad \frac{P_n}{Q_n}, \ldots$$

Ограничимся уравнением Пелля частного вида:

$$x^2 - D^2 = -1, \qquad (1)$$

где $D > 0$ не есть квадрат целого числа и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}$.

Подвергнув уравнение (1) ряду преобразований, на основании теоремы о том, всякая последующая подходящая дробь при $n \geq 2$ ближе к α, чем предыдущая, можно показать, что $\frac{x}{y}$ есть подходящая дробь в разложении $\sqrt{D}$ в непрерывную дробь.

Итак, если уравнение (1) имеет решения, то они являются членами подходящих дробей в разложении $\sqrt{D}$ в непрерывную дробь. Чтобы решить вопрос, какие именно подходящие дроби дают нам решение уравнения (1), следует воспользоваться свойством подходящих дробей

$$\sqrt{D} = \frac{P_k \alpha_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k \alpha_{k+1} + Q_{k-1}} \qquad (2)$$

и свойством полных частных квадратичной иррациональности

$$\alpha_{k+1} = \frac{\sqrt{D} + A_{k+1}}{B_{k+1}} \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2) и подвергнув полученное выражение преобразованиям мы придём к выводу, что если P_k и Q_k суть решения уравнения (1), то

$$(-1) = (-1)^{k+1} \cdot B_{k+1}. \qquad (4)$$

Решения уравнения (1), если таковые существуют, должны находиться среди членов подходящих разложений $\sqrt{D}$; отсюда вытекает необходимость и достаточность условия (4). Из наличия одного решения следует существование бесчисленного множества решений, так как полные частные периодически повторяются. Способ их нахождения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Если x_0, y_0 наименьшие целые положительные числа, образующие решения уравнения (1), то всякое целое положительное решения U, V удовлетворяют условию

$$U + V\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^n, \qquad (5)$$

при этом должно выполняться равенство (4).

Более подробное изложение данного вопроса можно найти в работах [1], [3], [6], [9].

§ 1.2 Уравнение второй степени от трёх переменных

Найдём все решения уравнения

$$x^2 + 2y^2 = z^2 \qquad (6)$$

в целых положительных, попарно взаимно простых числах x, y, z.

Заметим, что если x, y, z есть решение уравнения (6) и x, y, z не имеют общего делителя, отличного от 1, то они и попарно взаимно просты. Действительно, если x и y кратны простому числу p >2, то из равенства

$$\left(\frac{x}{p}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{y}{p}\right)^2 = \left(\frac{z}{p}\right)^2$$

следует, так как его левая часть - целое число, что z - кратно p. то же самое будет, если x и z делятся на p.

Заметим, что x должно быть числом нечётным, для того, чтобы наибольший общий делитель x, y, z был равен 1. Действительно, если x – чётно, то левая часть уравнения (6) будет чётным числом и, значит, z также будет чётным. Но x^2 и z^2 будут тогда кратны 4. Отсюда следует, что $2y^2$ должно делится на 4, другими словами, что y тоже должно быть чётным числом. Значит, если x – чётно, то все числа x, y, z должны быть чётными. Итак, в решении без общего, отличного от 1 делителя x должно быть нечётным. Отсюда уже следует, что и z должно быть тоже нечётным. Перенося x^2 в правую часть, мы получаем:

$$2y^2 = z^2 - x^2\,; \qquad 2y^2 = (z + x)\,(z - x).$$

Но $z + x$ и $z - x$ имеют наибольшим общим делителем 2. Действительно, пусть их наибольший общий делитель будет d. Тогда

$$z + x = kd\,, \qquad z - x = ld,$$

где k и l – целые числа. Складывая и вычитая эти равенства, мы будем иметь:

$$2z = d\cdot(k + l), \qquad 2x = d\cdot(k - l).$$

Но z и x нечётны и взаимно просты. Поэтому наибольший общий делитель $2x$ и $2z$ будет 2. Отсюда следует, что d=2.

Итак, или $(z + x)/2$ или $(z - x)/2$ нечётно. Поэтому или числа

$$z + x \qquad \text{и} \qquad \frac{z-x}{2}$$

взаимно просты, или взаимно просты числа

$$\frac{z+x}{2} \qquad \text{и} \qquad z - x.$$

В первом случае из равенства

$$(z + x)\frac{z-x}{2} = y^2$$

следует, что

$$z + x = n^2, \qquad z - x = 2m^2,$$

а во втором случае из равенства

$$\frac{(z+x)}{2}(z - x) = y^2$$

следует

$$z + x = 2m^2, \qquad z - x = n^2,$$

где n и m – целые, m – нечётное число и $n \geq 0$, $m \geq 0$. Решая эти две системы уравнений относительно x и z и находя y, мы получаем или

$$z = \frac{1}{2}\left(n^2 + 2m\right), \qquad x = \frac{1}{2}(n^2 - 2m^2), \qquad y = mn$$

или

$$z = \frac{1}{2}\left(2m + n^2\right), \qquad x = \frac{1}{2}(2m^2 - n^2), \qquad y = mn\,,$$

где m – нечётно. Объединяя эти две формулы представления решения *x, y, z* мы получаем общую формулу

$$x = \pm\frac{1}{2}(n^2 - 2m^2), \qquad y = mn, \qquad z = \frac{1}{2}\left(n^2 + 2m^2\right),$$

где m – нечётно. Но, для того, чтобы x и z были целыми числами, необходимо, чтобы n было чётным. Полагая $n=2в$ и $m=a$, мы получаем окончательную формулу, дающую все решения уравнения (6) в целых положительных, без общего делителя, большего 1 числах *x, y, z*:

$$x = \pm\frac{1}{2}(a^2 - 2в^2), \qquad y = 2aв, \qquad z = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2в^2\right), \qquad (7)$$

где a и $в$ положительны, взаимно просты и а – нечётно. При этих условиях величины а и в выбираются произвольно, но так, чтобы x было положительно. Формулы (7) действительно дают все решения в целых положительных и взаимно простых числах *x, y, z,* так как, с одной стороны, мы доказали, что *x, y, z* в этом случае должны представляться по формулам (7). А с другой стороны, если мы зададим числа *а* и *в*, удовлетворяющие нашим условиям, то *x, y, z* будут действительно взаимно просты и будут решением уравнения (6). [5]0

§ 1.4 Уравнения степени выше второй от трёх переменных

1.4.1. Если для уравнений с двумя неизвестными мы можем дать ответ о существовании конечного или бесконечного числа решений в целых числах, то для уравнений более с чем двумя неизвестными степени выше второй дать ответ на вопрос мы можем только для весьма частных классов уравнений. Тем не менее поддаётся разрешению и более трудный вопрос об определении всех решений уравнения в целых числах. В качестве примера ещё раз остановимся на на так называемой великой теореме Ферма.

Замечательный французский математик Пьер Ферма высказал утверждение, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при целом $n \geq 3$ не имеет решений в целых положительных числах *x, y, z* (случай $xyz = 0$ исключается положительностью *x, y, z*). Несмотря на то, что П. Ферма утверждал, что он имеет доказательство (по видимому, методом спуска, о котором речь будет идти ниже) этого утверждения, его доказательство впоследствии не было найдено. Более того, когда математик Куммер попытался его найти и даже думал одно время, что он его нашёл, он обнаружил, что одно положение верное в области обычных целых чисел, оказывается неверным для более сложных числовых образований, с которыми естественно приходится сталкиваться при исследовании проблемы Ферма.

Это обстоятельство заключается в том, что так называемые целые алгебраические числа, - другими словами, корни алгебраических уравнений с целыми рациональными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени, равным 1, - могут не единственным способом быть разложены на простые, не разложимые в свою очередь, целые сомножители той же алгебраической природы. Обычные же целые числа разлагаются на простые множители единственным образом. Например, 6 = 2·3 и никаких других разложений не допускает внутри совокупности обычных целых чисел.

Рассмотрим совокупность всех целых алгебраических чисел вида $m + n\sqrt{-5}$, где m и n обычные целые числа. Легко видеть, что сумма и произведение двух таких чисел опять будут числом той же совокупности. Совокупность чисел, обладающих тем свойством, что она содержит любые суммы и произведения чисел, в неё входящих, называется кольцом. По определению, в нашем кольце содержатся числа 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$, $1 - \sqrt{-5}$. Каждое из этих чисел в этом кольце, как легко можно установить, будут простыми, то есть не будут представлены в виде произведения двух не равных единице чисел нашего кольца. Но

$$6 = 2 \cdot 3 = \left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(1 - \sqrt{-5}\right),$$

другими словами, число 6 не единственным образом разлагается на простые сомножители в нашем кольце. То же обстоятельство, неединственность разложения на простые сомножители может иметь место и в других, более сложных, кольцах алгебраических целых чисел. Обнаружив это обстоятельство, Куммер убедился, что его доказательство общей великой теоремы Ферма неверно.

Для преодоления трудностей, связанных с неединственностью разложения на множители Куммером была построена теория идеалов, которая играет в настоящее время исключительно большую роль в алгебре и теории чисел. Но даже с помощью этой теории полностью доказать великую теорему Ферма Куммер не смог и доказал её только для n, делящихся хотя бы на одно из так называемых регулярных простых чисел. Не останавливаясь на понятии регулярного простого числа, мы можем узнать только, что до настоящего времени известно, существует ли только конечное число таких простых чисел или их бесконечное множество.

В настоящее время великая теорема Ферма доказана, но доказательство её чрезвычайно сложно, поэтому мы ограничимся доказательством для случая $n = 4$, так как метод спуска, на котором это доказательство построено, очень интересен.

1.4.1. Уравнение Ферма

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{8}$$

не имеет решений в целых числах x, y и z, $xyz \neq 0$.

Мы докажем даже более сильную теорему, именно, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{9}$$

не имеет решений в целых числах x, y и z, $xyz \neq 0$.

Из этого утверждения уже следует непосредственно отсутствие решений у уравнения (8). Если уравнение (9) имеет решение в целых, отличных от нуля числах в целых числах x, y, z, то можно предполагать, что эти числа попарно взаимно просты. Действительно, если есть решение, в котором числа x и y имеют наибольший общий делитель $d > 1$, то

$$x = d \cdot x_1, \qquad y = d \cdot y_1,$$

где $(x_1, y_1) = 1$. Разделив обе части уравнения (9) на d^4, мы будем иметь, что

$$x_1^4 + y_1^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2 = z_1^2, \qquad (10)$$

Но x_1 и y_1 – целые числа, значит, $z_1 = z / d^2$ – тоже целое число. Если бы у z_1 и y_1 был общий делитель $k > 1$, то x_1^2 в силу (10) должно было бы делиться на k, а, значит, x_1 и k не могли бы быть взаимно просты.

Итак, мы доказали, что если существует решение уравнения (9) в целых, отличных от нуля числах, то существует также решение в целых, отличных от нуля и попарно взаимно простых числах. Поэтому нам достаточно доказать, что уравнение (9) не имеет решений в целых, отличных от нуля и попарно взаимно простых числах. В дальнейшем ходе доказательства мы, говоря, что уравнение (9) имеет решение, будем предполагать, что оно имеет решение в целых, отличных от нуля и попарно взаимно простых числах.

Известно, что все решения уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (11)$$

в целых, отличных от нуля и попарно взаимно простых числах определяются по формуле, которая имеет вид

$$x = uv, \qquad y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2}, \qquad (12)$$

где u и v – два любых нечётных, взаимно простых положительных числа. (См. [1], [3], [5], [8])

Придадим несколько иной вид формулам (12), определяющим решения уравнения (11). Так как u и v – нечётные числа, то положив

$$\frac{u + v}{2} = a, \qquad \frac{u - v}{2} = b, \qquad (13)$$

мы определим числа u и v равенствами

$$u = a + b, \qquad v = a - b, \qquad (14)$$

где a и b – целые числа разной чётности. Равенства (13) и (14) показывают, что любой паре нечётных взаимно простых чисел u и v соответствует пара взаимно простых чисел a и b разной чётности и что любой паре взаимно простых чисел a и b разной чётности соответствует пара взаимно простых нечётных чисел u и v. Поэтому, сделав в формулах (12) замену u и v на a и b, мы получим, что все тройки целых положительных и попарно взаимно простых чисел x, y, z (x – нечётное), являющиеся решениями уравнения (11), определяются по формулам

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2, \qquad (15)$$

где a и b – два любых взаимно простых числа разной чётности при условии, что $x > 0$. Эти формулы показывают, что x и y – разной чётности. Если уравнение (9) имеет решение $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, то это значит, что

$$(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2,$$

другими словами, что тройка чисел (x_0^2, y_0^2, z_0) является решением уравнения (11). Но тога должны существовать два числа a и b, $a > b$, взаимно простые и разной чётности, таких, что

$$x_0^2 = a^2 - b^2, \quad y_0^2 = 2ab, \quad z_0 = a^2 + b^2. \qquad (16)$$

Мы допускаем при этом, для определённости, что x_0 – нечётно, а y_0 – чётно. Противоположное допущение ничего не изменило бы, так как было бы достаточно x_0 заменить на y_0 и наоборот. Но квадрат нечётного числа даёт в остатке 1 при делении на 4. Действительно,

$$(2N + 1)^2 = 4N^2 + 4N + 1 = 4N(N + 1) + 1.$$

Поэтому из равенства

$$x_0^2 = a^2 - b^2, \qquad (17)$$

следует, что a – нечётно, а b – чётно. В противном случае левая часть этого равенства при делении на 4 давала бы в остатке 1, а правая, так как мы предположили a – чётным, а b – нечётным, -1. Так как a – нечётно и $(a, b) = 1$, то и $(a, 2b) = 1$. Но тогда из равенства

$$y = 2ab$$

следует, что

$$a = t^2, \quad 2b = s^2, \qquad (18)$$

где t и s – какие-то целые числа. Но из соотношения (17) следует, что $\langle x_0, b, a \rangle$, есть решение уравнения (11). Значит

$$x_0 = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad a = m^2 + n^2,$$

где m и n – некоторые взаимно простые числа разной чётности. Из соотношения (18) имеем:

$$mn = \frac{b}{2} = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

откуда в силу взаимной простоты m и n следует, что

$$m = p^2, \quad n = q^2, \qquad (19)$$

где p и q – отличные от нуля целые числа. Так как $a = t^2$ и $a = m^2 + n^2$, то

$$q^4 + p^4 = t^2 \qquad (20)$$

Но

$$z_0 = a^2 + b^2 > a^2.$$

Поэтому

$$0 < t = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z_0} < z_0 \quad (z_0 > 1). \qquad (21)$$

Положив $q = x_1$, $p = y_1$ и $t = z_1$, мы видим, что если существует решение $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$, то должно существовать и другое решение $\langle x_1, y_1, z_1\rangle$, причём $0 < z_1 < z_0$. Этот процесс получения решений уравнений (9) можно продолжать неограниченно, и мы получим последовательность решений

$$\langle x_0, y_0, z_0\rangle, \quad \langle x_1, y_1, z_1\rangle, \ \dots, \ \langle x_n, y_n, z_n\rangle, \ \dots .$$

причём целые положительные z_0, z_1, z_2, ..., z_n,... будут монотонно убывать; другими словами, будут верны для них неравенства

$$z_0 > z_1 > z_2 > \dots > z_n > \dots .$$

Но целые положительные числа не могут образовать бесконечную монотонно убывающую последовательность, так как в такой последовательности не может быть больше z_0 членов. Мы пришли, таким образом, к противоречию, предположив, что уравнение (9) имеет хотя бы одно решение в целых числах x, y, z, $xyz \neq 0$. . Этим доказано, что уравнение (9) не имеет решений. Следовательно, и уравнение (8) не имеет решений в целых положительных числах x, y, z, так как в противном случае, если $\langle x, y, z\rangle$ – решение (8), то $\langle x, y, z^2\rangle$ – решение (9).

Метод доказательства, которым мы пользовались, заключавшийся в построении с помощью одного решения бесчисленной последовательности решений с неограниченно убывающими положительными z, называется методом спуска. Как мы уже говорили выше, осуществить этот метод в общем случае теоремы Ферма мешает пока неединственность разложения целых чисел алгебраических колец на простые сомножители из того же кольца.

Заметим, что мы доказали отсутствие целых решений не только у уравнения (9), но и у уравнения

$$x^{4n} + y^{4n} = z^{2n}.$$

Любопытно отметить, что уравнение

$$x^4 + y^2 = z^2.$$

имеет бесчисленное множество решений в целых положительных числах, например, $\langle 2, 3, 5\rangle$. Решение этого уравнения рассматривается во второй части работы.

Приведём ещё один пример на метод спуска, несколько изменив ход рассуждений.

1.4.2. Докажем, что уравнение

$$x^4 + 2y^4 = z^2 \qquad (22)$$

не имеет решений в целых, отличных от нуля числах x, y, z.

Допустим, что уравнение (22) имеет решение в целых положительных числах $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Эти числа мы сразу можем положить взаимно простыми, так как если бы они наибольшим общим делителем d >1, то числа x_0/d, y_0/d, z_0/d^2 так же были бы решением уравнения (22). Наличие же общего делителя у двух из всех возможных z в решениях (22) в целых положительных числах. Так как $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ – решение уравнения (22), то $\langle x_0^2, y_0^2, z_0\rangle$ будет решением уравнения

$$x^2 + 2y^2 = z^2. \qquad (23)$$

Пользуясь формулами (7) §1.2, дающими все целые положительные решения (23), мы видим, что существуют такие целые положительные a и b, $(a, b) = 1$, a – нечётно, которые удовлетворяют равенствам

$$x_0^2 = \pm\left(a^2 - 2b^2\right); \qquad y_0^2 = 2ab; \qquad z_0 = a^2 + 2b^2. \qquad (24)$$

Из равенства $y_0^2 = 2ab$ следует, что b само должно быть чётно, так как y_0 – чётно, y_0^2 – делится на 4, а a – нечётно. Так как $b/2$ и a взаимно просты, то из равенства

$$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = a \cdot \frac{в}{2}$$

непосредственно следует, что

$$a = m^2, \qquad \frac{в}{2} = n^2,$$

где m и n – целые положительные и $(m, 2n) = 1$. Но из (24) следует

$$x_0^2 = \pm\,(a^2 - b^2) = \pm\,(a^2 - 8(в/2)^2), \qquad (25)$$

где x_0 и a – нечётны. Мы уже видели, что квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт в остатке 1. Поэтому левая часть (25) при делении на 4 даёт в остатке 1, а $a^2 - 8(в/2)^2$ тоже даёт 1, при делении на 4. Значит в равенстве (25) скобка в правой части может входить только с плюсом. Теперь равенство (25) можно записать уже в форме

$$x_0^2 = m^4 - 8n^4$$

или в форме

$$x_0^2 + 2(2n^2)^2 = (m^2)^2, \qquad (26)$$

где x_0, n, m – целые положительные и взаимно простые числа. Значит, числа x_0, $2n^2$, m^2 образуют решение уравнения (23), причём x_0, $2n^2$, m^2 взаимно просты. Поэтому опять в силу формулы (7) § 1.2 найдутся такие целые числа p и q, p – нечётно, $(p, q) = 1$, что

$$2n^2 = 2pq, \qquad m^2 = p^2 + 2q^2, \qquad x_0 = \pm\,(p^2 - 2q^2) \qquad (27)$$

Но, так как $(p, q) = 1$ и $n^2 = pq$, то

$$p = s^2, \qquad q = r^2$$

где s и r – целые взаимно простые числа. Отсюда окончательно следует соотношение

$$s^4 + 2r^4 = m^2, \qquad (28)$$

которое показывает, что числа s, r, m образуют решение уравнения (22). Но из выше полученных равенств

$$z_0 = a^2 + 2b^2, \qquad a = m^2,$$

следует, что $z_0 > m$. Итак, имея решение $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, мы нашли другое решение $\langle s, r, m \rangle$, причём $0 < m < z_0$. Это же противоречит предположению, которое мы сделали, что решение $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, имеет z_0 наименьшим из возможных. Таким образом, мы пришли к противоречию, допустив существование решения у уравнения (22), и доказали, что это уравнение не разрешимо в целых, отличных от нуля числах.

Можно так же доказать, что уравнения

$$x^4 + 4y^4 = z^2, \qquad x^4 - y^4 = z^2,$$

$$x^4 - 4y^4 = z^2, \qquad x^4 - y^4 = 2z^2$$

неразрешимы в целых положительных числах.

В ы в о д ы

«Мудрость простейших истин признав,
повесь на стену себе
Знак сокровенный, таинственный знак
В. Т. В.
И если к вершине долгий путь
стал непосильным бременем –
вспомни, прежде чем повернуть:
Всё Требует Времени.»

Пит Хэйн

Исследуемое в работе противоречие не было устранено, однако попытка применить рассмотренные в работе приёмы для нахождения стандартных способов отыскания всех решений диофантовых уравнений второй степени с тремя неизвестными дала некоторые положительные результаты.

Итак, в результате проведённого исследования была самостоятельно найдена общая формула решения уравнения Пифагора, совпадающая с формулой предложенной Кожегельдиновым С. Ш., а так же найдено общее решение уравнения, задающего все основные прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам.

То есть, нашла подтверждение гипотеза о том, что если найти общую формулу всех решений уравнения Пифагор, то полученные результаты можно применить и для решения других задач данного раздела математики.

Рассмотренные объект и предмет исследования позволили достигнуть поставленной цели: были найдены несколько способов вывода общей формулы всех решений уравнения Пифагора, и рассмотрено уравнение, для переменных, выраженных числами, обратными натуральным. Удалось справиться с поставленными задачами, а именно:

1) познакомиться с методами и приёмами, использовавшимися для решения уравнения Пифагора;
2) использовать арифметическую функцию для записи общего решения уравнения Пифагора;
3) самостоятельно найти общую формулу всех решений уравнения Пифагора;
4) получить общую формулу всех прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам;

а, так же, наметить возможность применения полученных результатов для решения более сложных неопределённых уравнений второй и выше степени с тремя и более неизвестными.

Глоссарий

Диофантово уравнение – алгебраическое уравнение или система алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти натуральное, целое или рациональное решение. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть больше числа неизвестных. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределёнными уравнениями. Это, например, уравнения

$3x + 5y = 7$, $x^2 + y^2 = z^2$, $3x^2 + 4y^2 = 5z^2$ где $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b будем обозначать, через символ (a, b), и примем за него такое число, которое является наибольшим из всех общих делителей данных чисел.

Решения уравнения от n переменных, то есть фиксированные числа x_1, x_2^2, … , x_n, которые обращают заданное неопределённое уравнение в верное равенство (множество) будем обозначать $\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$. Например, тройка ‹1, 2, 3› является решением уравнения $x^2 + 2y^2 = z^2$: $1^2 + 2 \cdot 2^2 = 3^2$.

Уравнение Пифагора – уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, где $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Список литературы:

1. Арнольд И. В. Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1939 г.
2. Башмакова И. Г. Теория чисел. М.: Наука, 1972 г.
3. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966 г.
4. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981 г.
5. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. М.: Издат. – технико – теорет. Лит., 1957г.
6. Гребенча М. К. Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1949 г.
7. Грибанов В. У. Титов П. И. Теория чисел. М.: Просвещение, 1964 г.
8. Кожегельдинов С. Ш. О задачах, связанных с пифагоровыми тройками // Межвуз. Конф. Посвящ. 150 – летию со дня рождения Абая. Абайские чтения. Семипалатинский педагогический институт имени Шакарима, 1991 г.: Тез. Докл. – Семипалатинск, 1991. С. 132 – 133.
9. Кожегельдинов С. Ш. Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. Учебное пособие. М.: Прометей, 1993 г.,
10. Ляпин С. Е., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1974 г.
11. Михелович Ш. Х. Теория чисел. М.: Высшая школа, 1962 г.
12. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980 г.
13. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. М: Издат. физ. – мат. лит., 1961
14. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. – М.: Учпедгиз, 1959г.
15. Хамов Г. Г. Элементы теории диофантовых уравнений в задачах и упражнениях. Учебное пособие. Ленинград, 1986 г.
16. Ферма П. Исследования по теории чисел и диафантову анализу: пер. с лат. и фр. / Под ред. И. Г. Башмаковой, М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. Лит, 1992 – стр. 320
17. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста. / сост. А. П. Савин. - М.: Педагогика, 1989 г. С. 95 – 96.