МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Центрально Казахстанское отделение малой академии наук Республики Казахстан

# «Уравнение Пифагора и задачи, связанные с ним»

Секция: Математика.


Исполнитель:

Бокарев Никита
учащийся 7 класса Б
ОШ №6, г. Шахтинска
обл. Карагандинская

Научный руководитель:

Буякова Елена Валерьевна
учитель математики
ОШ №6 г. Шахтинска
обл. Карагандинская


Год выполнения: 2012-2013

Караганда, 2013 г.

**Оглавление**

## Введение

«Загадок неразгаданных не счесть,
Хоть на догадки разум наш и падок,
И вот она, загадка из загадок…»
*Л. Камоэнс.* Сонет

«Между прочим, если вы ищите
хорошую проблему…»
*Р. Фейнман.* Лекции по физике

### Актуальность

Нет ни одной математической проблемы, которая бы ни была столь популярна, как знаменитая последняя (или великая) теорема Ферма. В переводе на современный математический язык Ферма утверждал, что уравнение

$$a^n + b^n = c^n, \quad n > 2$$

не имеет целочисленных решений с $abc \neq 0$.

Но и, хорошо изученный случай, для $n = 2$, (уравнение Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$) имеющий бесконечное множество решений, в источниках, изученных нами, не имеет единой формулы для задания всех решений. Исключением оказалась аннотация работы казахстанского учёного Кожегельдинова С. Ш., который предложил общую формулу, задающую все решения уравнения Пифагора.

Поскольку решение диофантовых уравнений имеет не только теоретический интерес (они встречаются, например, в физике, астрономии, кристаллографии), то возникло желание попытаться самостоятельно найти решение, полученное Кожегельдиновым С. Ш. и, если удастся, применить полученные результаты к решению других диофантовых уравнений.

**Противоречие:** Имеется практическая необходимость выработать стандартный способ нахождения всех решений диофантовых уравнений второй степени и выше с двумя и более переменными, но на сегодняшний день, не существует единого способа или приёма, позволяющего решить любое диофантово уравнение, если его степень выше первой.

Указанное противоречие позволило сформулировать цель и задачи нашей работы, исходя из уровня личных знаний.

**Цель работы:** Нахождение способа задания общей формулы всех решений уравнения Пифагора, и рассмотрение возможных задачи, связанных с данным уравнением.

Гипотеза: **Если** удастся найти общую формулу для нахождения всех решений уравнения Пифагора, **то** возможно удастся применить полученные результаты и для решения других задач данного раздела математики, а может быть и для всех диофантовых уравнений второй и выше степени с двумя и более переменными, **так как** многие проблемы математики решались для частных случаев, а после обобщались.

Объект исследования: некоторые диофантовы уравнения второй степени с тремя переменными.

Предмет исследования: процесс нахождения общего решения уравнения Пифагора и рассмотрение задач, связанных с уравнением Пифагора.

Задачи:

1. Познакомиться с методами и приёмами, использовавшимися для решения уравнения Пифагора.
2. Рассмотреть возможность использования арифметических функций к решению диофантовых уравнений.
3. Самостоятельно вывести общую формулу решений уравнения Пифагора.
4. В случае удачи, рассмотреть возможность применения полученных результатов при решении задач, связанных с уравнением Пифагора.

Планирование ожидаемых результатов:

Работа над проектом поможет найти общую формулу решений уравнения Пифагора и оценить перспективы применения полученных результатов для решения других неопределённых уравнений второй степени.

Критерии оценки ожидаемых результатов:

- выявление возможности использования арифметических функций к решению уравнения Пифагора и задач, связанных с ним;
- нахождение единой формулы всех решений уравнения Пифагора;
- рассмотрение возможности использования полученных результатов для решения близких задач.

Методы исследования

1) изучение литературы;
2) консультация со специалистами в области алгебры и теории чисел;
3) анализ теоретических данных;
4) наблюдение за числами и арифметическими функциями;
5) сопоставление накопленных теоретических данных с наблюдаемыми;
6) проведение расчетов и соотнесение их с результатами полученными другими авторами.

# **Глава I** Уравнение Пифагора и задачи, связанные с ним

## **§ 1.1** Пифагоровы тройки

Напомним, что уравнением Пифагора называется уравнение вида

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Любую тройку натуральных чисел ***x***, ***y***, ***z***, удовлетворяющую уравнению Пифагора (1), называют пифагоровой. Такую тройку мы будем обозначать символом ‹***x***, ***y***, ***z***›. Тройка натуральных чисел ‹3, 4, 5› является пифагоровой: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Так как $4^2 + 3^2 = 5^2$, то и тройка ‹4, 3, 5› является пифагоровой. Пифагоровы тройки ‹3, 4, 5› и ‹4, 3, 5› различны и являются различными решениями уравнения Пифагора (1).

Встаёт вопрос: как найти все пифагоровы тройки. Существует ряд методов отыскания пифагоровых троек. Мы здесь приведём ещё один метод отыскания общей формулы всех основных (а, следовательно, и всех) пифагоровых троек, т. е. таких пифагоровых троек ‹***x***, ***y***, ***z***›, для которых нет ни одного отличного от единицы, натурального числа, делящего все три числа ***x***, ***y***, ***z*** без остатка. Условимся, что если нет специальной оговорки, то все числа, рассматриваемые в пределах данной работы, являются натуральными.

В дальнейшем наибольший общий делитель нескольких чисел настолько важен, что для него существует специальное обозначение: $(\alpha, \beta)$; $(\alpha, \beta, \gamma)$; . . .. Так, например $(2, m)$ обозначает наибольший общий делитель чисел 2 и m. Запись $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ означает, что наибольший общий делитель чисел $\alpha, \beta$ и $\gamma$ равен 1, т. е. $\alpha, \beta$ и $\gamma$ – взаимно простые числа. Чтобы ещё раз подчеркнуть важность для нас числа $(2, m)$ заметим следующее. Для любых натуральных чисел m и n одно из двух чисел

$$\frac{2n^2}{(2, m)} \quad \text{и} \quad \frac{m^2}{(2, m)} \qquad (*)$$

является квадратом некоторого числа, другое – удвоенным квадратом того же или другого числа. Иначе говоря, если первое число является квадратом некоторого числа, то второе – удвоенным квадратом того же или другого числа и наоборот, если второе число является квадратом некоторого числа, то первое – удвоенным квадратом того же или другого числа. При этом нетрудно доказать, что если числа m и n взаимно простые, то и числа (∗) будут взаимно простыми.

В самом деле, пусть $(m, n) = 1$. Тогда, если:

1) m – нечётно, то при любой чётности n число (2, m) = 1 и, следовательно,

$$\left(\frac{2n^2}{(2,m)}, \frac{m^2}{(2,m)}\right) = (2n^2, m^2) = (n^2, m^2) = (n, m)^2 = (n, m) = 1;$$

2) m – чётно (следовательно, n – нечётно), то при (2, m) = 2. Пусть m = 2k, где k ϵ $\mathbb{N}$. Поэтому будем иметь, что

$$\left(\frac{2n^2}{(2,m)}, \frac{m^2}{(2,m)}\right) = (n^2, 2k^2) = (n^2, k^2) = (n, k)^2 = (n, k) = (n, 2k) = (n, m) = 1.$$

Таким образом, в обоих случаях получаем, что числа (∗) взаимно простые, если (m, n) = 1.

Очевидно, что если ‹***a*, *b*, *c***› – основная пифагорова тройка, то и любая тройка ‹k***a***, k***b***, k***c***›, где k ϵ $\mathbb{N}$, пифагорова. Поэтому достаточно найти общую формулу всех основных пифагоровых троек.

## **§ 1.2** Способы нахождения общей формулы пифагоровых троек

**1.2.1.** Для отыскания общей формулы всех основных пифагоровых троек будем рассматривать не уравнение Пифагора (1) (в этом состоит одно из принципиальных отличий предлагаемого метода от предлагаемых в изученной нами литературе), а равносильное ему уравнение

$$(x + y - z)^2 = 2(z - x)(z - y), \qquad (2)$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x + y - z > 0$, $z - x > 0$, $z - y > 0$. Ясно, что каковы бы ни были числа $x, y, z$, число $x + y - z$, определённое равенством (2), делится на 2, т. е. чётно.

Каков геометрический смысл равенств (1) и (2)? Два квадрата $PBMD_1$ и $QB_1ND$: один (первый) со стороной длины $x$ и другой (второй) со стороной длины $y$ впишем соответственно в верхний левый и нижний правый углы квадрата ABCD со стороной длины $z$ так, как показано на рис. 1.

Вписанные квадраты $PBMD_1$ и $QB_1ND$ пересекутся по квадрату $A_1B_1C_1D_1$ со стороной длины $x + y - z$. Непокрытыми останутся два прямоугольника $APA_1Q$ и $CNC_1M$: у каждого из них длина одной стороны равна $z - x$, а длина другой (смежной) - $z - y$. Иначе говоря, $AP = A_1Q = MC = C_1N = z - x$, $AQ = A_1P = MC_1 = CN = z - y$.

Площадь квадрата ABCD равна сумме площадей квадратов квадрата $PMBD_1$ и $QB_1ND$ и площадей прямоугольников $APA_1Q$, $CNC_1M$ без площади квадрата $A_1B_1C_1D_1$, т. е.

$$z^2 = x^2 + y^2 + (z - x)(z - y) + (z - x)(z - y) - (x + y - z)^2.$$

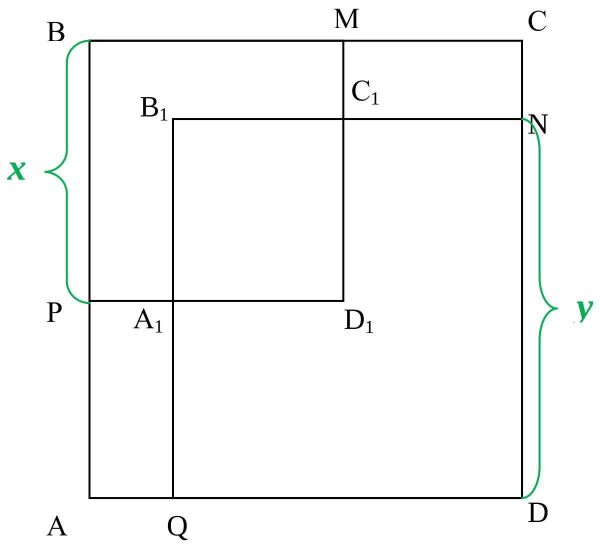


Рис.1

Следовательно, сумма площадей вписанных квадратов $PMBD_1$ и $QB_1ND$ равна площади наибольшего квадрата $ABCD$, т. е. $\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}$, а площадь наибольшего квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна сумме площадей прямоугольников $APA_1Q$ и $CNC_1M$, т.е. $\boldsymbol{(x + y - z)^2 = 2(z - x)(z - y)}$.

Известно, что если $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{N}$, $(\boldsymbol{a, b}) = 1$ и $\boldsymbol{ab = c^2}$, то $\boldsymbol{a} = c_1^{\,2}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_2^{\,2}}$ и $\boldsymbol{c = c_1c_2}$, где $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \mathbb{N}$. Этим утверждением мы воспользуемся в дальнейшем.

Пусть $\langle \boldsymbol{x, y, z} \rangle$ – произвольная основная пифагорова тройка. Тогда

$$(\boldsymbol{x, y, z}) = \boldsymbol{1}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что $\boldsymbol{z - x}$ и $\boldsymbol{z - y}$ – взаимно простые числа. Действительно, если бы у них был общий делитель d > 1, то на основании (2) d был бы делителем числа $\boldsymbol{x + y - z}$. В таком случае d был бы общим делителем чисел $\boldsymbol{x, y}$ и $\boldsymbol{z}$, тогда как эти числа, в силу (3), должны быть взаимно простыми. Итак, $(\boldsymbol{z - x}, \boldsymbol{z - y}) = 1$, т. е. $\boldsymbol{z - x}$ и $\boldsymbol{z - y}$ – взаимно простые числа.

Взаимно простые числа $\boldsymbol{z - x}$ и $\boldsymbol{z - y}$ имеют разную чётность. Убедимся в этом. То, что они не могут быть одновременно чётными очевидно. Если бы они были одновременно нечётными, то правая часть равенства (2) делилась бы только на два, в то время, как его левая часть, в силу чётности числа $\boldsymbol{x + y - z}$, делилась бы по крайней мере на 4. Следовательно, среди чисел $\boldsymbol{z - x}$ и $\boldsymbol{z - y}$ одно должно быть чётным, а другое нечётным. Из (2) следует, что нечётное из чисел должно быть квадратом некоторого (нечётного) числа, а чётное – удвоенным квадратом того же или другого числа. Поэтому полагая, что

$$z - x = \frac{2n^2}{(2, m)}, \qquad z - y = \frac{m^2}{(2, m)},$$

где $m, n \in N$, $(m, n) = 1$, и учитывая равенство (2), получим формулу

$$x = \frac{m(m+2n)}{(2,m)}, \qquad y = \frac{2n(m+n)}{(2,m)}, \qquad z = \frac{m^2+2mn+2n^2}{(2,m)}, \qquad (4)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$, которая является общей формулой всех основных пифагоровых троек, так как из неё легко выводятся формулы, предлагаемые в широко известной литературе. [1,2, 4] Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (4) мы называем формулой.

**1.2.2.** Совершенно аналогично можно найти общую формулу (4) всех основных пифагоровых троек исходя из равенства

$$(x + y + z)^2 = 2(z + x)(z + y), \qquad (**)$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$. Выясним геометрический смысл равенств (1) и (**).

Нарисуем квадрат ABCD со стороной длины $x + y + z$. В его верхний левый и нижний правый углы впишем два одинаковых прямоугольника $PBMD_1$ и $QB_1ND$ с длинами сторон $z + x$ и $z + y$ так, как показано на рис. 2.

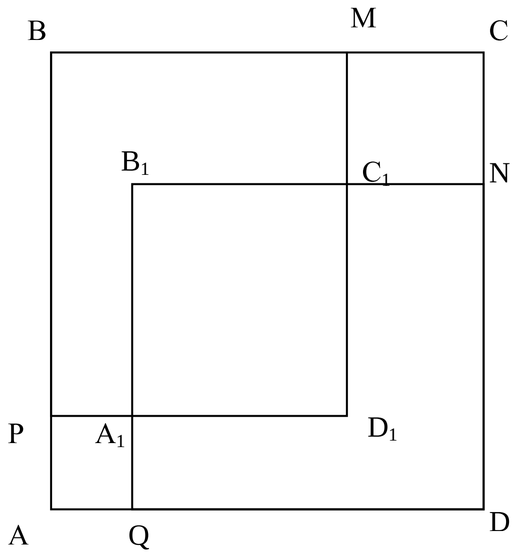


Рис.2

Эти два прямоугольника пересекаются по квадрату $A_1B_1C_1D_1$ со стороной длины $z$. При этом в большом квадрате ABCD останутся непокрытыми два квадрата $APA_1Q$ и $CNC_1M$: один со стороной длины $x$, а другой - $y$. Из условия $x^2 + y^2 = z^2$, следует, что площадь квадрата со стороной длины $z$ равна сумме площадей двух меньших квадратов. Поэтому площадь квадрата ABCD равна сумме площадей двух одинаковых прямоугольников $PBMD_1$ и $QB_1ND$ с длинами сторон $z + x$ и $z + y$:

$(x + y + z)^2 = (z + x)(z + y) + (z + x)(z + y)$, т. е. $(x + y + z)^2 = 2(z + x)(z + y)$.

Нетрудно заметить, что если $x, y, z \in \mathbb{N}$, то уравнения (1) и (**) равносильны. Более подробно на уравнении (**) мы останавливаться не будем.

Вернёмся к формуле (4). Теперь нетрудно написать и общую формулу всех пифагоровых троек:

$$x = k\frac{m(m+2n)}{(2, m)}, \qquad y = k\frac{2n(m+n)}{(2, m)}, \qquad z = k\frac{m^2+2mn+2n^2}{(2, m)}, \qquad (\mathbf{5})$$

где $k, m, n \in \mathbb{N}$ *и* $(m, n) = 1$.

Ясно, что формула (4) является частным случаем формулы (5) и получается из неё при $k = 1$.

Формула

$$x = k\frac{a^2-b^2}{(2, a-b)}, \qquad y = k\frac{2ab}{(2, a-b)}, \qquad z = k\frac{a^2+b^2}{(2, a-b)}, \qquad (\mathbf{6})$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ и $(a, b) = 1$, которая, как и формула (5), является общей формулой всех пифагоровых троек. При $k = 1$ из формулы (6) получается формула

$$x = \frac{a^2-b^2}{(2, a-b)}, \qquad y = \frac{2ab}{(2, a-b)}, \qquad z = \frac{a^2+b^2}{(2, a-b)}, \qquad (\mathbf{7})$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ $(a, b) = 1$, которая, как и формула (4), является общей формулой всех основных пифагоровых троек.

Если $a = m + n$ и $b = n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$, то из формул (6) и (7) получим формулы (4) и (5) соответственно. Если же $m = a - b$ и $n = b$, где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ $(a, b) = 1$, то из формул (4) и (5) получим соответственно формулы (7) и (6). Следовательно, формулы (4) и (7), как и формулы (5) и (6), равносильны.

Заметим ещё, что если: 1) $m = a - b$, $n = b$; 2) $m = 2b$, $n = a - b$; 3) $m = k - l$, $n = l$; 4) $m = l$, $n = (k - l) / 2$, то из формулы (4) соответственно получим известные формулы:

1) $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$;

2) $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$;

3) $x = \dfrac{k^2-l^2}{2}$, $y = kl$, $z = \dfrac{k^2+l^2}{2}$;

4) $x = kl$, $y = \dfrac{k^2-l^2}{2}$, $z = \dfrac{k^2+l^2}{2}$;

где $a, b, k, l \in \mathbb{N}$, $a > b$, $k > l$ $(a, b) = (k, l) = 1$, $a$ и $b$ имеют разную чётность, $k$ и $l$ – оба нечётны. Таким образом, полученная нами формула являясь единой, включает в себя все доказанные другими авторами [1, 2, 4] формулы, и не имеет ограничений, связанных с чётностью параметров.

## **Глава II** Решение уравнения Пифагора в числах, обратных натуральным

Предположим, что натуральные числа ***x, y, z*** удовлетворяют уравнению (1) .

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2} \qquad (1)$$

Нетрудно заметить, что $y > z$. Из уравнения (1) имеем, что

$$y^2 z^2 = (xy + xz)(xy - xz)$$

или

$$\frac{yz}{xy+xz}=\frac{xy-xz}{yz}, \qquad (2)$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$, $y > z$. Пусть

$$\frac{yz}{xy+xz}=\frac{b}{a},$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Тогда из равенства (2) получаем, что

$$\frac{xy-xz}{yz}=\frac{b}{a},$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Напомним, что $x, y, z \in \mathbb{N}$, $y > z$.

Несложно доказать, что $a > b$, т. е. доказать, что $yz > xy - xz$. Допустим, что это не так. Тогда $a \le b$, т. е. $yz \le xy - xz$ или $xy \ge xz + yz = z(x + y)$. Откуда $xy \ge z(x + y)$.

Обе части последнего неравенства возведём в квадрат. Тогда получим, что $x^2y^2 \ge z^2(x + y)^2$ или $x^2y^2 \ge z^2(x^2 + 2xy + y^2)$, т. е. $y^2 z^2 + x^2 z^2 + 2xyz^2 \le\le x^2y^2$ или

$$y^2 z^2 + x^2 z^2 < x^2 y^2 \qquad (3)$$

Если обе части неравенства (3) разделим (почленно) на натуральное число $x^2 y^2 z^2$, то получим неравенство

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2},$$

которое противоречит равенству (1). Следовательно, $yz > xy - xz$, т. е. $a > b$.

Из равенств

$$\frac{yz}{xy+xz}=\frac{xy-xz}{yz}=\frac{b}{a}, \qquad (*)$$

где $x, y, z, a, b \in \mathbb{N}$, $y > z$, $(a, b) = 1$, после ряда тождественных преобразований, получим, что

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2-b^2}{2ab}, \qquad (**)$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$. Положим, что

$$x = k\frac{a^4 - b^4}{(2\,a - b)^2}, \qquad y = k\frac{2ab\left(a^2 + b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad \textbf{(4)}$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$. Из (4) очевидным образом следует (∗∗) и наоборот из (∗∗) следует (4).

Из последнего равенства соотношения (∗) найдём, что

$$\frac{xy - xz}{yz} = \frac{b}{a},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$, найдём, что

$$axy - axz = byz$$

или

$$z = k\frac{axy}{ax + by}, \qquad \textbf{(5)}$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определены равенствами (4). Из равенств (4) и (5) получим, что

$$z = k\frac{2ab\left(a^2 - b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad \textbf{(6)}$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$.

Имеет место равенство

$$\left(\frac{a^4 - b^4}{(2\,a - b)^2}, \frac{2ab\left(a^2 + b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \frac{2ab\left(a^2 - b^2\right)}{(2\,a - b)^2}\right) = 1,$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$. Поэтому формула

$$x = k\frac{a^4 - b^4}{(2\,a - b)^2}, \qquad y = k\frac{2ab\left(a^2 + b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad z = k\frac{2ab\left(a^2 - b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad \textbf{(7)}$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$, которая представляет собой совокупность формул (4) и (6), даёт все решения в натуральных числах диофантова уравнения (1). Следовательно, формула (7) является общей формулой всех решений диофантова уравнения (1) в натуральных числах.

При $k = 1$ из формулы (7) получается формула

$$x = \frac{a^4 - b^4}{(2\,a - b)^2}, \qquad y = \frac{2ab\left(a^2 + b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad z = \frac{2ab\left(a^2 - b^2\right)}{(2\,a - b)^2}, \qquad (8)$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$.

Формула (8) даёт все основные прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам. Очевидно, мы получим все прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам, если воспользуемся формулой (7).

# Глава III Перспективы нахождения общих решений диофантовых уравнений второй степени

## § 3.1 Перспективы

В данной работе предпринята попытка найти общее решение уравнения Пифагора и получить все прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам. Стоит задача найти решения (или доказать, что их нет) уравнений:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

где $x, y, z, t \in \mathbb{N}$;

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y^2,$$

где $x_i, y \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$;

$$x^2 + 2y^2 = z^2,$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$;

$$x^2 + ky^2 = z^2,$$

где $x, y, z, k \in \mathbb{N}$, а так же ряда других.

В перспективе – разработка общего подхода, позволяющего решить любое диофантово уравнение второй и более степени с двумя и более переменными.

## § 3.2 Риски проекта

1. Не хватит изученных математических понятий для решения уравнения Пифагора в общем виде.
2. Не удастся самостоятельно найти общую формулу решения уравнения Пифагора.
3. Не удастся применить полученные результаты к решению близких задач.
4. Не удастся представить результаты в виде проекта.

Для предотвращения подобных рисков следует не только подробно изучить относящуюся к теме исследования литературу, но и обратиться за консультацией к специалистам в области алгебры и теории чисел, а так же, ввести критерии оценки качества проекта.

## § 3.3 Обзор литературы

Литература, в которой освещается проблема диофантовых уравнений, в том числе уравнение Пифагора, не многочисленна. В рассмотренной литературе рассмотрены некоторые способы нахождения решений уравнения Пифагора [2,4,5]. Приводятся общие формулы решения данного уравнения [3]. Но в тех источниках, которыми мы располагали, не приводятся расчёты подобные сделанным в данной работе.

## В ы в о д ы

«Мудрость простейших истин признав,
повесь на стену себе
Знак сокровенный, таинственный знак
В. Т. В.
И если к вершине долгий путь
стал непосильным бременем –
вспомни, прежде чем повернуть:
Всё Требует Времени.»
Пит Хэйн

Исследуемое в работе противоречие не было устранено, однако попытка применить рассмотренные в работе приёмы для нахождения стандартных способов отыскания всех решений диофантовых уравнений второй степени с тремя неизвестными дала некоторые положительные результаты.

Итак, в результате проведённого исследования была самостоятельно найдена общая формула решения уравнения Пифагора, совпадающая с формулой предложенной Кожегельдиновым С. Ш., а так же найдено общее решение уравнения, задающего все основные прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам.

То есть, нашла подтверждение гипотеза о том, что если найти общую формулу всех решений уравнения Пифагор, то полученные результаты можно применить и для решения других задач данного раздела математики.

Рассмотренные объект и предмет исследования позволили достигнуть поставленной цели: были найдены несколько способов вывода общей формулы всех решений уравнения Пифагора, и рассмотрено уравнение, для переменных, выраженных числами, обратными натуральным. Удалось справиться с поставленными задачами, а именно:

1) познакомиться с методами и приёмами, использовавшимися для решения уравнения Пифагора;
2) использовать арифметическую функцию для записи общего решения уравнения Пифагора;
3) самостоятельно найти общую формулу всех решений уравнения Пифагора;
4) получить общую формулу всех прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам;

а, так же, наметить возможность применения полученных результатов для решения более сложных неопределённых уравнений второй и выше степени с тремя и более неизвестными.

## Критерии оценки эффективности проекта

**1.** Успешное овладение соответствующими разделами математики.

Показатели

1) Умение самостоятельно находить и изучать подходящий материал и применять теоретические знания на практике;

Индикаторы:

- количество правильно подобранных и изученных тем;
- соотношение тем, самостоятельно изученных и тем, которые дали в школе;
- количество тем, в которых прослеживается историческая связь между понятиями в математике.

2) Успехи в обучении математике.

Индикаторы:

- количество отличных оценок по предмету;
- соотношение количества отличных и прочих оценок;
- динамика изменения соотношения количества отличных оценок по предмету и прочих оценок.

**2.** Применение рассмотренных теоретических знаний при решении конкретных задач.

Показатели

1) Применение рассмотренных понятий при изучении соответствующих тем и применение знаний на практике.

Индикаторы:

- соотношение между изученными в процессе работы над проектом понятиями и принципиально новыми;
- количество задач, решённых при работе над проектом;
- соотношение самостоятельно разобранных задач и задач, решение которых показано преподавателем.

2) Развитие самоконтроля, самоанализа.

Индикаторы:

- количество самостоятельно найденных ошибок, при решении задач;
- коэффициент, отражающий количество ошибок при решении задач

$$k = \frac{кол \ldots ошибок}{кол \ldots заданий} \cdot 100\ \%;$$

- скорость исправления ошибок: $V = \dfrac{k_1 - k_2}{t}$,

где $k_1$ – коэффициент на начало периода, $k_2$ - коэффициент на конец периода, $t$ - время в днях.

## Глоссарий

**Диофантово уравнение** – алгебраическое уравнение или система алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти натуральное, целое или рациональное решение. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть больше числа уравнений. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределёнными уравнениями.

**Наибольший общий делитель** натуральных чисел a и b будем обозначать, через символ (a, b), и примем за него такое число, которое является наибольшим из всех общих делителей данных чисел.

**Решения уравнения от n переменных,** то есть фиксированные числа $x_1$, $x_2$, … , $x_n$, которые обращают заданное неопределённое уравнение в верное равенство (множество) будем обозначать ‹$x_1$, $x_2$, … , $x_n$›. Например, тройка ‹1, 2, 3› является решением уравнения $x^2 + 2y^2 = z^2$: $1^2 + 2 \cdot 2^2 = 3^2$.

**Уравнение Пифагора** – уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, где x, y, z $\in \mathbb{N}$.

.

## Список литературы:


1. Башмакова И. Г. Теория чисел. М.: Наука, 1992 г.
2. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. М.: ИТКЛ, 1987г.
3. Кожегельдинов С. Ш. О задачах, связанных с пифагоровыми тройками // Межвузовская конференция, посвящённая 150–летию со дня рождения Абая. СГУ имени Шакарима,1991 г., стр. 132 – 133
4. Литцман В. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки. М.: Знание, 2008 г.
5. Ферма П. Исследования по теории чисел и диафантову анализу: пер. с лат. и фр. / Под ред. И. Г. Башмаковой, М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. Лит, 1992 – стр. 320
6. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста. / сост. А. П. Савин. - М.: Педагогика, 1989 г. стр. 280 – 282